# Закон Гука в імітаційному моделюванні механічних систем

## Вступ

В сучасному житті віртуальна реальність успішно конкурує з реальним світом. Так в школі і в вишах широко застосовують імітаційні моделі фізичних процесів [1-3], які допомагають учням зрозуміти абстрактні речі і роблять навчання цікавим.

Вимоги до швидкодії і обмежені ресурси персональних комп’ютерів призводять до спрощеного моделювання, суто кінематичного, коли враховують лише координати і швидкості рухливих тіл. В певних обставинах це цілком виправдано, наприклад, рух часток у невагомості, який супроводжується стиканням часток між собою і з нерухомими перешкодами. При стиканні частки з перешкодою складова її швидкості, тангенційна до поверхні перешкоди, просто зміню свій знак. Хоч в цілому це не відповідає природі, закони ідеального газу така модель відтворює правильно. Втім при переході до макроскопічного моделювання і появі зовнішнього поля тяжіння такі спрощення призводять до небажаних ефектів, як от «просочування» часток через стінки сосудів [4] .

В роботі пропонується підхід до побудови динамічних моделей з механіки, який враховує пружні деформації при стиканні рухомих тіл з перешкодами і між собою. При такому підході стикання розглядається не як миттєва дія, а як процес, який розвивається у часі згідно із законом Гука [5].

На базі запропонованої моделі створена комп’ютерна програма, яка імітує поведінку механічних систем і може слугувати «живим» задачником з певних розділів класичної фізики.

## Складові моделі

Складовими моделі є рухомі і нерухомі кулі і перешкоди, створені з відрізків прямих. Куля має розмір, масу і пружність. Між кулями можливі перемички у формі відрізків прямих, котрі з’єднують центри двох куль. Перемички мають задану довжину і пружність і не мають маси. Завдяки перемичкам з куль можна створювати агрегати - конструкції довільної складності.

Перешкоди непорушні, натомість кулі разом з перемичками, якщо вони є, можуть рухатися. Кулі не обертаються, але агрегати, які з них створені, можуть обертатися.

Сила реакції від стикання кулі з перешкодою виникає за рахунок деформації. В моделі деформацію уособлює та частина кулі, яка опиняється в межах перешкоди. Чим більша та частина, тим більша сила реакції відповідно до закону Гука. І не суттєво, що саме деформується, куля чи перешкода, важлива наявність і розмір самої деформації. Для зручності прийнято, що деформуються лише кулі.

При стиканні куль з кулями, перемичками і перешкодами тертя вважається відсутнім. Деформація куль абсолютно пружна, тобто після завершення процесу стикання куля повністю відновлює свою форму. Деформація може супроводжуватись втратою енергії, кількість втрат регулюється налаштуваннями моделі. Тепло, яке могло б виділитися внаслідок деформацій, ніяк не враховується, поняття теплової енергії в моделі взагалі відсутнє.

Модель двовимірна, простір моделі обмежений прямокутником заданої ширини і висоти. З огляду на двовимірність моделі кулі точніше було б називати колами, але ми будемо притримуватися обраного терміну, бо він більш відповідає нашій уяві про рух тіл у просторі.

## Обчислювальна схема ---

Для того, щоб імітація механіки відбувалася в реальному масштабі часу, обчислення мають виконуватися синхронно із відображенням стану моделі. Обчислення циклічні, частота повторень задається таймером, тобто один крок обчислень виконується за один такт модельного часу.

Крок обчислень починається із визначення, з якими перешкодами зустрілася куля, яку деформацію і відповідну силу реакції створила кожна перешкода. Сили реакцій складаються і обчислюється сумарне прискорення кулі на поточний момент дискретного часу t.

Тут m – маса кулі, – сила реакції однієї перешкоди. Сума береться по всім перешкодам, з якими перетинається куля в момент часу t. Жирним шрифтом показані векторі величини.

Згідно закону Гука , де *k* – коефіцієнт жорсткості матеріалу кулі, - деформація.

В моделі вважається, що всі кулі створені з одного матеріалу. Тому

Далі обчислюється швидкість кулі у момент часу t.

і її положення

У двох останніх рівняннях Δt є проміжком між двома сусідніми моментами дискретного часу, в моделі Δt = 1.

Зауважимо, що на кожному кроці обчислень можуть бути враховані втрати енергії від деформації, від спротиву повітря, а також вплив тяжіння, розглянемо це пізніше.

## Стикання куль з лінійними перешкодами

Процес стикання з перешкодою, створеною з прямих ліній, починається, коли контур кулі перетинається з лінією. Тут виникає сила реакції, яка направлена до центру кулі і пропорційна деформації кулі.

Мірою деформації є довжина відрізка CD (рис.1 а). Сила реакції прикладена до точки С, яку будемо називати точкою дотику.



Рисунок 1 -

Оцінити розмір деформації (довжину відрізка CD) при стиканні кулі з перешкодою можна прирівнявши кінетичну енергію кулі, яку вона мала до зіткнення, до потенційної енергії деформації в момент зупинки кулі перед зміною напряму швидкості кулі на протилежний.

Тут *m* – маса кулі, *v* – тангенціальна складова швидкості кулі відносно лінії перешкоди, *F(x)* – сила реакції в залежності від розміру деформації *x*, L – деформація в момент зупинки кулі.

По закону Гука , де *k* – коефіцієнт жорсткості матеріалу кулі. Після підставлення *F(x)* в формулу (1) і інтегрування отримаємо

Природно вважати, що найбільша припустима деформація дорівнює радіусу кулі, тому рівняння (2) окреслює межі застосування моделі. Якщо *L < r*, то , з чого витікає

Тобто швидкість кулі не може перевищувати певної межі, на яку впливають розмір кулі, її маса і жорсткість матеріалу. Характер впливу відображує формула (3). Якщо швидкість кулі перевершить критичне значення, її поведінка стає непередбаченою, наприклад, вона може пройти крізь перешкоду, або вийти за межі модельного простору.

З того, що стикання є процес у часі, вірогідними стають випадки одночасного стикання кулі з декількома перешкодами (рис. 1б). В такому разі одночасно існують декілька точок дотику, реакції від яких складаються.

Треба також врахувати випадки, коли куля частково перетинає лінію (рис. 2а).



Рисунок 2 -

Тут постає питання, що вважати точкою дотику. Точкою дотику варто вважати середину тієї частини лінії перешкоди, яка опиниться в межах кулі. Таке рішення не випадкове, бо це єдине місце розташування, яке забезпечує безперервний перехід від загального випадку (рис. 2а) до двох крайніх (рис. 2б). Сила реакції буде направлена до центру кулі.

## Стикання куль із кулями

Коли відстань між центами куль стає меншою за суму їх радіусів, починається процес стикання (рис.3). В будь-який момент часу на кожну з куль діє сила, яка направлена від точки дотику до центру кулі. Зауважимо, що в процесі стикання задіяна лише складова швидкості куль, яка направлена по лінії, що з’єднує центри куль.

При стиканні куль величина деформації визначається шириною зони перекриття двох кіл. Згідно з третім законом Ньютона сили реакції куль однакові за величиною, тому і деформації куль повинні бути однаковими. Це змушує вважати точкою дотику куль точку С, яка поділяє навпіл зону перекриття в її найширшій частині (рис.3).

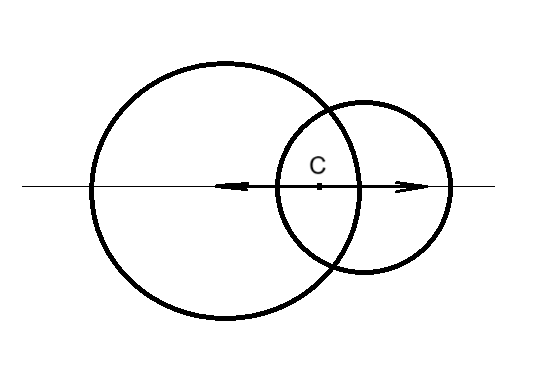


Рисунок 3 –

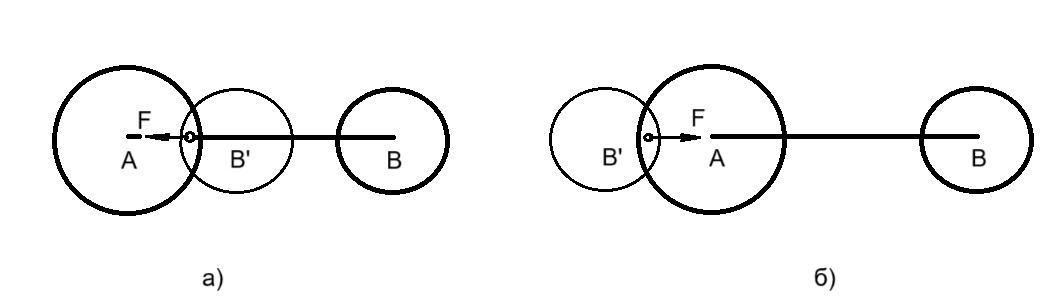
При стиканні куль з кулями діють ті самі міркування щодо коефіцієнту жорсткості і обмежень на швидкість, що і при стиканні куль з лініями.

## Реакція перемичок ---

Окрім куль і ліній, модель включає агрегати, які складаються з двох куль, з’єднаних відрізком прямої, кінці якого співпадають із центрами куль – перемичками (для короткості будемо називати такий агрегат гантеллю). Перемички не абсолютно жорсткі, вони можуть стискатися або розтягуватися, але не гнутися.

Якщо зв’язані кулі змінюють своє положення, відстань між ними може збільшитися або зменшитися. Відповідно перемичка буде розтягуватися або стискатися і діяти на обидві кулі.

На рисунку 4а) зображений агрегат, який складається з куль A і B, з’єднаних перемичкою.



Нехай внаслідок зовнішнього впливу куля A зайняла нову позицію і відстань між кулями скоротилася, що спричинило силу спротиву перемички, яка пропорційна скороченню відстані.

Раніш стикання кулі з лініями і з іншими кулями ми виражали в термінах точок дотику, що дозволяло уніфікувати вплив різних перешкод при розрахунку руху кулі. Те саме варто зробити і зараз.

Вочевидь реакція перемички не залежить від її довжини, а лише від зміни тієї довжини. Тому розрахунок реакції перемички можна звести до розрахунку реакції стикання двох куль. Для того треба подумки наблизити другу кулю до першої на відстань , де – довжина ненапруженої перемички, і – радіуси відповідних куль.

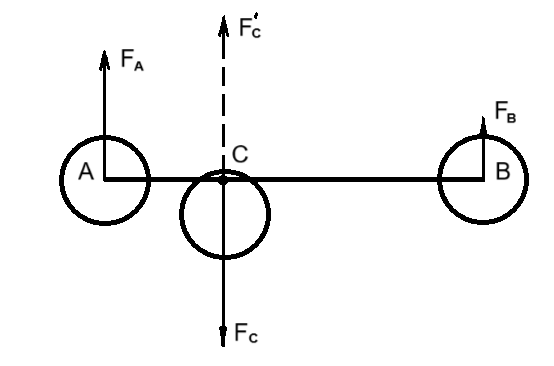
У випадку, коли перемичка не скоротилася, а видовжилася (рис.4б), відстань .

Єдине, що відрізняє точки дотику, отримані від перемичок, то коефіцієнт жорсткості, який у перемичок може відрізнятися від коефіцієнту жорсткості куль.

## Стикання куль з перемичками

Імітаційні можливості моделі зростуть, якщо кулі зможуть стикатися на тільки з кулями і лініями, але і з перемичками також.

При стиканні з перемичкою точка дотику і сила реакції визначаються так само, як при стиканні кулі з лінією (рис.5).



Сила реакції від кулі C розподіляється між кулями A і B по закону важеля.

Сили Fa і Fb надають кулям A і B прискорення відповідно до їх мас і цього достатньо, щоб повністю передбачити поведінку системі куля-гантель в процесі стикання.

## Втрати енергії при стиканнях

В реальному житті будь-яка механічна взаємодія супроводжується розсіюванням енергії. В моделі ми також повинні імітувати втрати енергії, якщо хочемо наблизити її поведінку до реальності. Без такої імітації коливальні процеси, які повсякчасно виникають в моделі, ніколи б не затухали.

При зустрічі кулі з перешкодою процес стикання проходить дві фази – фазу збільшення деформації і фазу зменшення деформації. В першій фазі кінетична енергія кулі переходить у потенційну енергію стискання і швидкість кулі зменшується до нуля. В другій фазі, навпаки, потенційна енергія стискання перетворюється в кінетичну енергію.

Без імітації втрат кінетична енергія, набрана кулею в другій фазі, дорівнювала б потенційній , де k – коефіцієнт жорсткості, d – розмір деформації.

Якщо в обчисленнях, що чисельно моделюють другу фазу, зменшити коефіцієнт жорсткості у w разів, то і набрана кулею кінетична енергія стане меншою у w разів. Те саме стосується і першої фази, в якій кінетична енергія переходить в потенційну. Відмінність в тому, що для імітації втрати енергії в цій фазі коефіцієнт жорсткості треба не зменшувати, а збільшувати у w разів.

## Втрати енергії від спротиву повітря

## Перевірка коректності моделі

Чисельне вирішення рівнянь руху не може бути абсолютно точним. Похибка залежить від багатьох чинників, тому визначимо її експериментально, шляхом прямого вимірювання. Якщо виключити силу тяжіння і будь-які втрати енергії від тертя і деформації, треба очікувати, що кінетична енергія кулі після зіткнення з нерухомою перешкодою буде такою самою, як і перед зіткненням.

Перевіримо це для сцени в якій куля рухається і стикається з лінією, як на рис. 1а). Параметри сцени такі: k = 100, m = 1000, r = 200, v = 5. Відстань до перешкоди s будемо змінювати в діапазоні від 0 до 5.

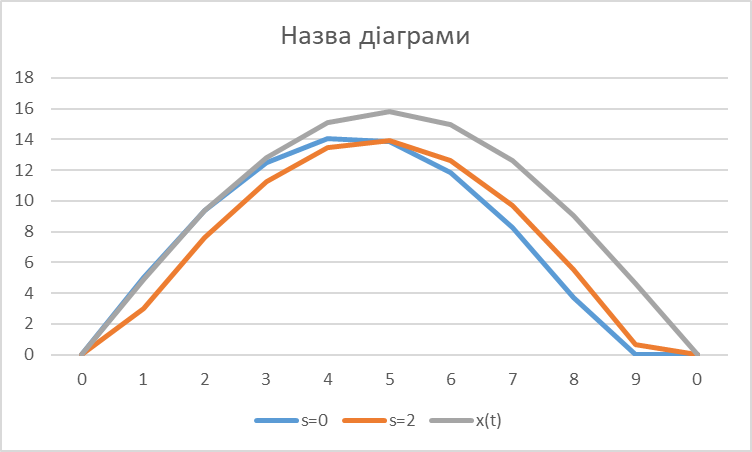
Відносну похибку будемо рахувати за формулою Результати вимірювання похибки зведені в таблицю.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| s | err(s) |  |
| 0 | 0.012804 |
| 1 | -0.00617 |
| 2 | -0.00806 |
| 3 | -0.00111 |
| 4 | 0.005849 |
| 5 | 0.012804 |

З обчислювальної схеми витікає, що функція err(s) періодична і інтервал [0, 4] вміщує один її період. Середнє значення відносної похибки дорівнює 0.0078, що складає менше 1% від величини швидкості кулі.

Дослідимо деформацію кулі в процесі стикання. На діаграмі показані графіки зміни деформації з часом у випадках, коли відстань до перешкоди дорівнює нулю (синій) і коли відстань дорівнює 2 (помаранчевий). Для порівняння зображений графік аналітичного вирішення (сірий).

З досліду можна зрозуміти, що чисельне вирішення рівняння руху близьке до аналітичного, що обумовлює прийнятний розмір похибки (< 1%). Точність чисельного вирішення головним чином залежить від кількості дискретного часу, який займає процес стикання. Чим більше буде вузлів обчислення, тим ближче до реальності буде її імітація.



Аналітичним вирішенням рівняння з початковими умовами є функція

.

З рішення ясно, що тривалість процесу стикання, і відповідно точність, залежить лише від співвідношення k/m. Чим воно менше, тим більше період синусоїди і кількість вузлів обчислення. Втім амплітуда синусоїди має протилежну залежність. Амплітуда – це максимальна деформація кулі і вона обмежена радіусом кулі.

Перевіримо поведінку моделі в більш складній сцені, де декілька куль рухаються в замкненому просторі. Будемо вимірювати кінетичну енергію куль, як інтегральну характеристику системи в цілому. Треба переконатися, що після великої кількості зіткнень вона залишається незмінною, або змінюється в межах допустимої похибки. Зіткнення куль відбуваються як з лініями, так і з кулями, усі зіткнення будемо рахувати.

Параметри сцени такі: 10 куль масою 1000 і радіусом 25, початкові швидкості випадкові в межах від 1 до 2, початкова кінетична енергія системи 4025.9500.

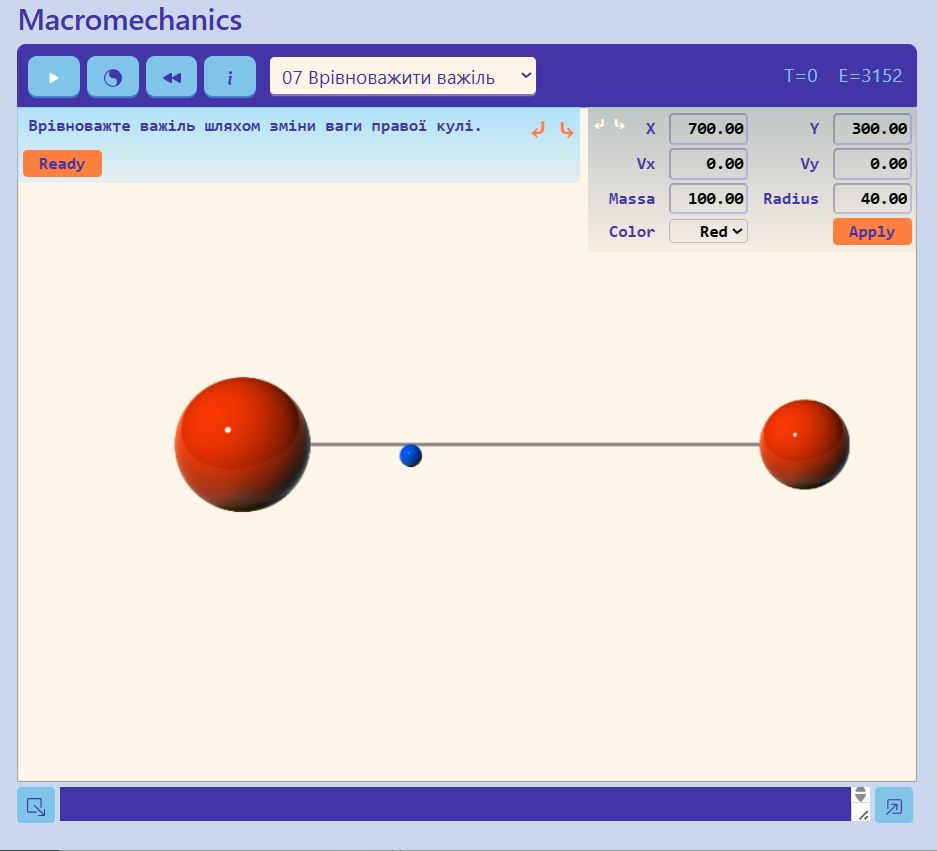
Після мільйона тактів дискретного часу відбулося 57827 зіткнень і загальна кінетична енергія стала 5521.4471. Це відрізняється від початкового значення, і відносна похибка складає 0.37146. Треба зауважити, що це значення накопичилось в результаті великої кількості зіткнень, і похибку одного зіткнення треба оцінити як [6] .

Знаючи похибку в кінетичній енергії, можна визначити похибку у швидкості тобто в межах 1%. Це збігається з попереднім спостереженням.

Зауважимо, що в більшості сценаріїв треба вводити фактор розсіювання енергії в розмірі декількох процентів на зіткнення, тому точність моделювання можна вважати достатньою.

## Інтерактивний задачник

На базі обчислювальної моделі створена програма інтерактивного задачника [7]. Програма надає змогу користувачу створювати власні і вирішувати чужі задачі. Програма має web-інтерфейс, головна сторінка зображена на рис. Центральну частину сторінки займає простір, на якому відображається поточний стан моделі.



Користувач обирає задачу для вирішення і на сторінці з’являється сцена, яка відповідає умові задачі. Щоб вирішити задачу, користувач робить розрахунки і за їх результатами змінює параметри наявної сцени. Вихідні дані для розрахунків користувач бере з умови задачі і з параметрів елементів сцени (параметри елементів можна бачити і змінювати).

Після натискання кнопки програвання користувач спостерігає, як вплинули на поведінку моделі зроблені ним зміни. Якщо задача вирішена вірно, це наочно видно з динаміки сцени і до того ж підтверджується зміною кольору вікна умови на зелений. Якщо вирішення помилкове, користувач може зробити наступну спробу.

Знайти параметри сцени, які вирішують задачу, користувач може і без розрахунків, методом спроб і помилок. Навіть такий спосіб вирішення слід визнати корисним, бо і він дає певне розуміння фізичних законів, і в той же час показує переваги розрахунку над емпіричним пошуком.

## Посилання

1. PhET Interactive Simulations (University of Colorado Boulder) <https://phet.colorado.edu/uk/>
2. Algodoo <https://www.algodoo.com/>
3. [Fritzson] Fritzson P. А. Principles of Object Oriented Modeling and Simulation with Modelica 3.3: A Cyber-Physical Approach / Peter А. Fritzson. – Printed in the United States of America: Wiley-IEEE Press, 2015. – 1256 р. – (2nd edition).
4. Бондарєв В.М., Черепанова Ю.Ю. Комп’ютерна симуляція термодинамічних процесів з навчальними цілями // В журналі «Наукові праці Вінницького національного технічного університету» № 2 за 2024 рік (фаховий журнал категорії Б). DOI <https://doi.org/10.31649/2307-5376-2024-2-6-16>
5. Чаусов М. Г. Механіка матеріалів : підручник / М. Г. Чаусов. – Київ : Центр учбової літератури, 2019. – 594 с. – ISBN 978-611-01-1707-4.​
6. Bevington, P. R., Robinson, D. K. Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences. – 3rd ed. – New York : McGraw-Hill, 2003. – 320 с. – ISBN 978-0072472271.
7. Інтерактивний задачник з механіки [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://tss.co.ua/macro/.

https://tss.co.ua/macro/

[Bevington] | Philip R. Bevington, D. Keith Robinson – *"Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* | <https://experimentationlab.berkeley.edu/sites/default/files/pdfs/Bevington.pdf>

Physlets (by Davidson College) <https://www.compadre.org/Physlets/>